

# Sujet Grand Oral Maths : Dans quelle mesure les probabilités permettent-elles de modéliser la performance aux échecs ?

► Sommaire [Sauter à une section](#) ∨

Bonjour. Je vais vous parler d'un cas où les **mathématiques** abstraites du **programme** de **terminale** rencontrent un objet concret : le classement des joueurs d'échecs.

Le **sujet** est précis : dans quelle mesure les probabilités permettent-elles de modéliser la performance aux échecs ? Cette **question** me semble parfaite pour le Grand Oral parce qu'elle mobilise plusieurs chapitres du **programme** : la **loi binomiale**, les **suites récurrentes**, les **fonctions** logistiques, et la **loi des grands nombres**.

L'enjeu est concret. Quand un grand maître joue contre un débutant, on s'attend à ce qu'il gagne. Mais quelle est exactement la probabilité de victoire ? Comment la calculer ? Comment la mettre à jour après chaque partie ? Le classement Elo, créé par le physicien Arpad Elo dans les années mille neuf cent soixante, répond à ces **questions** avec un modèle élégant. Je vais l'analyser ici sous l'angle mathématique.

Je procéderai en trois étapes. D'abord, j'appliquerai la **loi binomiale** à un match entre joueurs supposés de même niveau. Ensuite, je présenterai la formule Elo et je montrerai qu'elle correspond à une **suite récurrente** convergente. Enfin, je discuterai les **limites** du modèle et ses approches alternatives.

## La loi binomiale appliquée à un match

---

Commençons par la modélisation la plus directe. Imaginons deux joueurs de niveau identique qui jouent dix parties consécutives. Aux échecs, il y a trois résultats possibles : victoire, nulle, défaite. Pour simplifier, on compte une nulle comme une demi-victoire. Sur dix parties, le nombre de victoires (ou demi-victoires comptées) suit, sous hypothèses, une **loi binomiale**.

Plus précisément, si on note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de victoires du joueur A sur  $n$  parties, et si chaque partie est une expérience de Bernoulli de paramètre  $p$  (probabilité de victoire de A à chaque partie), alors  $X$  suit la loi  $B(n, p)$ . La probabilité d'obtenir exactement  $k$  victoires est donnée par la formule au **programme** de **terminale** :  $P(X = k)$  égale combinaison de  $n$  parmi  $k$ , multiplié par  $p$  puissance  $k$ , multiplié par  $(1 - p)$  puissance  $(n - k)$ .

Calculons un **exemple** numérique. Pour  $n$  égal à dix et  $p$  égal à zéro virgule cinq (joueurs supposés de même niveau), la probabilité de gagner exactement six parties sur dix vaut combinaison de dix parmi six, soit deux cent dix, multiplié par zéro virgule cinq puissance dix, soit un sur mille vingt-quatre. Le calcul donne environ zéro virgule deux zéro cinq, soit vingt virgule cinq pour cent.

Plus intéressant encore : la probabilité de remporter le match, c'est-à-dire de gagner au moins six parties sur dix, s'obtient en sommant  $P(X = 6) + P(X = 7) + \dots + P(X = 10)$ . Le calcul donne environ zéro virgule trois sept sept, soit trente-sept virgule sept pour cent.

C'est un résultat contre-intuitif. Même entre joueurs parfaitement égaux, le résultat parfaitement équitable de cinq-cinq n'a que vingt-cinq pour cent de probabilité. Autrement dit, un score « inégal » est plus probable qu'un score « égal ». La **loi binomiale** explique pourquoi tant de matchs paraissent déséquilibrés alors que les joueurs sont au même niveau : c'est le hasard de la distribution, pas une différence de force.

La principale **limite** de cette modélisation est l'hypothèse  $p$  égal à zéro virgule cinq. En pratique, deux joueurs ne sont jamais exactement au même niveau. Il faut donc une méthode pour estimer  $p$  à partir des cotes des deux joueurs. C'est ce que fait la formule Elo.

## La formule Elo et la suite récurrente de mise à jour

---

Le système Elo est composé de deux **fonctions** mathématiques essentielles. La première estime la probabilité de victoire à partir des cotes. La seconde met à jour les cotes après chaque partie.

La **formule de probabilité** s'écrit :  $P(A \text{ bat } B)$  égale un divisé par (un plus dix puissance ( $R_B$  moins  $R_A$  divisé par quatre cents)), où  $R_A$  et  $R_B$  sont les cotes des deux joueurs. Cette fonction est une **sigmoïde** : elle vaut toujours entre zéro et un, elle est croissante en ( $R_A$  moins  $R_B$ ), et elle prend la valeur zéro virgule cinq quand les cotes sont égales.

Calculons un **exemple**. Si  $R_A$  vaut mille six cents et  $R_B$  vaut mille huit cents, l'écart est de deux cents points en faveur de B. On calcule  $P$  égale un divisé par (un plus dix puissance zéro virgule cinq), soit un divisé par environ quatre virgule un six, soit environ zéro virgule deux quatre. Donc le joueur A, plus faible, a environ vingt-quatre pour cent de chances de battre B. Ce chiffre, vingt-quatre pour cent, est précieux : il quantifie une intuition qualitative (« A est plus faible mais peut gagner »).

La **mise à jour de cote**, après une partie, suit la formule  $R'_A$  égale  $R_A$  plus  $K$  multiplié par (résultat moins  $P$ ), où le résultat vaut un en cas de victoire, zéro virgule cinq en cas de nulle, zéro en cas de défaite, et où  $K$  est un coefficient typiquement entre seize et trente-deux.

Si A bat B contre toute attente, alors  $R'_A$  vaut mille six cents plus seize multiplié par (un moins zéro virgule deux quatre), soit mille six cents plus seize multiplié par zéro virgule sept six, soit mille six cents plus douze, soit mille six cent douze. A gagne douze points. Symétriquement, B perd douze points : c'est un système à somme nulle.

Si en revanche A perd, ce qui était attendu, alors  $R'_A$  vaut mille six cents plus seize multiplié par (zéro moins zéro virgule deux quatre), soit mille six cents moins quatre, soit mille cinq cent quatre-vingt-seize. A perd seulement quatre points : sa cote bouge peu parce que la défaite est conforme au pronostic.

Du point de vue du **programme de terminale**, ce mécanisme est une **suite récurrente**. Si on note  $u_n$  la cote du joueur A après la  $n$ -ième partie, on a la relation  $u_{n+1}$  égale  $u_n$  plus  $K$  multiplié par ( $r_n$  moins  $p_n$ ), où  $r_n$  est le résultat de la  $n$ -ième partie et  $p_n$  la probabilité prédite par la formule Elo. Cette suite est-elle convergente ?

Sous l'hypothèse que le joueur A a un **vrai niveau**  $E$  constant, on peut montrer que  $u_n$  converge vers  $E$ . L'idée intuitive : à chaque partie, l'espérance de ( $r_n$  moins  $p_n$ ) est nulle si la probabilité prédite est exacte. Donc en moyenne, la cote ne dérive pas de  $E$ . C'est une application directe de la **loi des grands**

**nombres** : la moyenne empirique des résultats converge vers l'espérance théorique, et la cote s'ajuste autour de E.

## Limites du modèle et approches alternatives

---

Le système Elo est un modèle élégant, mais il repose sur trois hypothèses qu'il faut discuter honnêtement.

Première hypothèse : la **stationnarité**. La cote suppose que le niveau du joueur reste constant entre les parties. C'est faux en pratique : un joueur progresse, un autre fatigue, un troisième vieillit. Le coefficient K, plus élevé pour les débutants et plus bas pour les joueurs établis, est un palliatif partiel. C'est le compromis biais-variance classique en statistique : plus K est grand, plus la cote suit les changements de niveau, mais plus elle fluctue à cause du bruit.

Deuxième hypothèse : l'**indépendance** des parties. La **loi binomiale** suppose que chaque partie est indépendante des précédentes. Or une victoire renforce psychologiquement, une défaite peut entraîner une cascade d'erreurs. Les corrélations sont réelles mais difficiles à modéliser.

Troisième hypothèse : la **validité de la sigmoïde**. La formule Elo a été calibrée sur des populations de joueurs occidentaux dans les années mille neuf cent soixante. Aux extrêmes (écarts de plus de quatre cents points), la formule extrapole hors de son domaine de calibration. Pour quantifier : la probabilité qu'un joueur de mille deux cents Elo batte Magnus Carlsen, à deux mille huit cent cinquante, vaut un divisé par (un plus dix puissance quatre virgule un deux cinq), soit environ zéro virgule zéro zéro zéro sept cinq, c'est-à-dire à peu près une chance sur treize mille. Cette précision est suspecte : en réalité, le débutant n'a jamais battu Carlsen, et la formule ne peut pas être validée empiriquement à ces écarts.

Une approche alternative, plus moderne, est celle d'AlphaZero. Ce **programme** n'utilise pas de modèle probabiliste explicite. Son réseau de neurones estime directement une valeur de position et une distribution de probabilité sur les coups, mais ces probabilités sont implicites, issues d'un apprentissage. AlphaZero remet en cause l'idée que les probabilités doivent être modélisées par des formules : elles peuvent être apprises par expérience. C'est un changement de **paradigme**, qui montre les **limites** de l'approche paramétrique.

## Conclusion

---

Pour répondre à ma **question** initiale, les probabilités permettent de modéliser la performance aux échecs avec une précision remarquable mais bornée. La **loi binomiale** explique pourquoi des matchs déséquilibrés peuvent émerger de joueurs égaux. La formule Elo, à travers une **suite récurrente** convergente, permet d'estimer la probabilité de victoire entre deux joueurs quelconques et de mettre à jour leurs cotes au fil des parties. La **loi des grands nombres** assure que cette estimation converge vers la vraie force des joueurs, sous des hypothèses de stationnarité.

Les **limites** sont précises : stationnarité, indépendance, calibration aux extrêmes. Les modèles modernes par apprentissage automatique offrent une alternative non paramétrique mais opaque. À mon sens, cette discussion entre modélisation explicite et apprentissage statistique est l'un des grands **enjeux** des **mathématiques** appliquées contemporaines, et les échecs en sont l'un des **exemples** les plus pédagogiques.

Je vous remercie pour votre attention et je suis prêt à répondre à vos **questions**.